Koordinátageometria

1) a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x+y=10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van?(6 pont)

b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x+y=b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

2) A *PQRS* négyszög csúcsai: $P(3;-1)$, $Q(1;3)$, $R(-6;2)$ és $S(-5;-5)$.

Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen * jelet a táblázat megfelelő mezőibe. Válaszát indokolja, támassza alá számításokkal!

a) A állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs derékszöge. (4 pont)

b) B állítás: A *PQRS* négyszög húrnégyszög. (4 pont)

c) C állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs szimmetriacentruma. (5 pont)

	Igaz	Hamis
A		
B		
C		

3) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer S síkjában. Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $4x-3y\geq 18$, azaz $A:=\{P(x;y)\in S \quad | \quad 4x-3y\geq 18\}$;

a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0$, azaz $B:=\{P(x;y)\in S \quad | \quad x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0\}$,

a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2=4$, azaz $C:=\{P(x;y\in S) \quad | \quad y^2=4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az *A*, a *B* és a *C* halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B\setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

c) Ábrázolja a $B\cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb, illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

4)

a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x\mapsto x^2-8x+11$ hozzárendeléssel megadott függvényt (3 pont)

b) Adja meg a $y=x^2-8x+11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét. (11 pont)

5) Egy háromszög két oldalegyenese az x tengely és az $y=\frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2+(y-2)^2=4$. Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú és

a) az alaplapja az x tengelyre illeszkedik (7 pont)

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei! (9 pont)

6) Adott a $K(t)=t^2+6t+5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\le 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+6x+5$$

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

7) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében: $\underline{a}(\cos t;\sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t;\cos^2 t)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

8) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa $(A;B)$ illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit! (4 pont)

c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve? (6 pont)

9) Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$$DA: 3x-4y-20=0 \qquad AB: 3x+5y-20=0$$
$$BC: 4x-3y+12=0 \qquad CD: 5x+3y+15=0$$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

10) Az $x^2=2y$ egyenletű parabola az $x^2+y^2\le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

11) Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2+y^2+6x+4y-3=0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1;-2)$.

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon! (11 pont)

b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

12) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;5)$ pontra, valamint az $x+y=4$ és $x+y=6$ egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3. (16 pont)

13) Az $y=ax+b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2;6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a<0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki a területét (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)! (16 pont)

14) Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$AB:\ y=0$

$BC:\ x+10y=20$

$CA:\ y=\frac{1}{2}x-4$

a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit! (7 pont)

b) Számítsa ki a háromszög B csúcsnál lévő belső szögét! (4 pont)

15) Egy háromszög két csúcsa $A(8;2)$; $B(-1;5)$ a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit! (3 pont)

b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! (8 pont)

16) Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

17) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!

(7 pont)

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

18) A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge $60°$-os. (16 pont)

19) Az $ABCD$ húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)^2+(y-2)^2=100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x-y=4$. A trapéz AB alapjának egy belső pontja $P(-5;1)$, BC szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit! (16 pont)

20) Egy $ABCD$ négyzet A csúcsa a koordinátarendszer y tengelyére, szomszédos B csúcsa pedig a koordinátarendszer x tengelyére illeszkedik.

a) Bizonyítsa be, hogy a négyzet K középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei! (8 pont)

b) Egy ilyen négyzet középpontja a $(7;7)$ pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsa ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit! (8 pont)

21) Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16;10)$, $B(2;4)$, $C(10;2)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét! (6 pont)

K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től, és C-től.

b) Határozza meg K pont koordinátáit! (8 pont)

22) Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0;0)$, $B(30;0)$, $C(30;48)$; $D(0;48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét! (3 pont)

A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2+y^2-36x-48y+819=0$ alakban adja meg.

b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének! (4 pont)

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18; 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.

c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát! (5 pont)

23) Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét! (5 pont)

b) Írja fel a parabolához az $E(5;-8)$ pontjába húzott érintő egyenletét! (5 pont)

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit! (4 pont)

24) Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7;\ 5)$ pont rajta van a k körön! (2 pont)

b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét! (5 pont)

c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja! (9 pont)

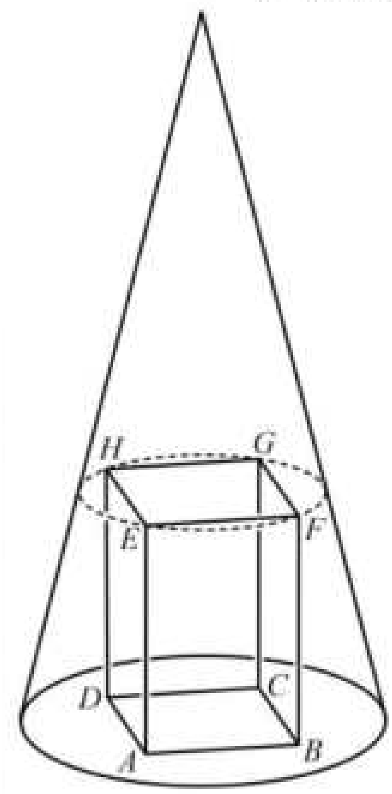
25) Az $ABCDEFGH$ négyzetes oszlop AE, BF, CG, DH élei merőlegesek az $ABCD$ alaplapra. Az A csúcsból kiinduló három él hossza $AB = AD = 8$ egység, $AE = 15$ egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát! (3 pont)

A négyzetes oszlop köré egy P csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az A, B, C, D csúcsok a kúp alaplapjára, az E, F, G, H csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.

b) Számítsa ki a kúp felszínét! (7 pont)

c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.) (6 pont)



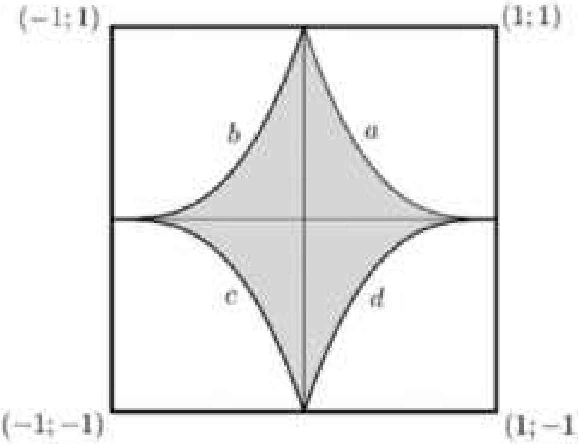
26) Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.

a) Határozza meg a háromszög oldalainak a hosszát! (6 pont)

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6;0)$, $B(6;0)$, és $C(0;8)$.

b) Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög kerületét és területét is! (10 pont)

27) Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint.
Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái
$(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, illetve $(1;-1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az a jelű ív egyenlete: $y=(1-x)^3$, $0\le x\le 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.



a) Írja fel a másik három (az ábrán b, c, illetve d jelű) ív egyenletét is! (4 pont)

A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség $12\ \text{m}^2$ terület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges! (5 pont)

A kétszemélyes társasjátékban minden játszma csak valamelyik játékos győzelmével végződhet, döntetlen nincs. Minden játszmában 1 pontot kap a győztes, a vesztes pedig 0 pontot.
Anna és Bori nagyon szereti ezt a társasjátékot, sok játszmát lejátszottak már. Ha egymás ellen játszanak, akkor Anna 0,4 valószínűséggel, Bori pedig 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Egyik alkalommal megállapodnak, hogy addig játszanak újabb játszmákat, amíg valamelyikük először éri el a 10 pontot (és így megnyeri a játékot).

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bori legfeljebb 12 játszma után megnyeri a játékot? (Kezdéskor mindkettőjüknek 0 pontja van.) (7 pont)

28) Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB=20$, $BC=18$, $ABC_\sphericalangle=70°$, $CAD_\sphericalangle=50°$.

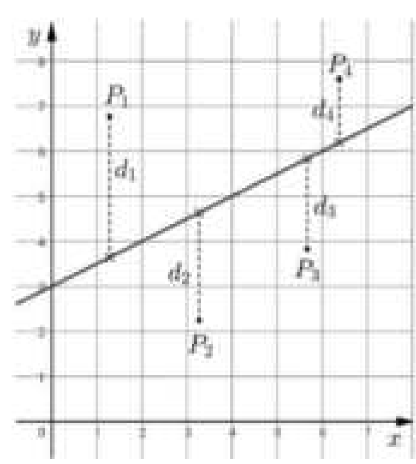
a) Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe? (7 pont)

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2;0)$, $Q(6;0)$ és $R(0;5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1{,}8;0)$ (2 pont)

c) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen! (7 pont)

29) A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.
Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)



a) Határozza meg az $R(4;2)$ és az $S(4;5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ egyenestől! (3 pont)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak **négyzetösszege** (az ábrán látható példában $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$).

Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1;3)$, $B(3;5)$ és $C(4;4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y=mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A, B* és *C* pontokra! ($m\in\mathbb{R}$) (6 pont)

Az $y=\frac{1}{3}\left(-2x^2+11x\right)$ egyenletű g görbe áthalad a megadott A és B pontokon, a h egyenes pedig az origón és a C ponton.

c) Mekkora a g és h által közbezárt korlátos alakzat területe? (7 pont)